Неравенство Седракяна

В данном листке все переменные по умолчанию принимают только положительные значения.

1. Докажите, что
$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geqslant\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

2. **Неравенство Седракяна.** Докажите, что
$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

3. Докажите, что равенство в неравенстве Седракяна достигается тогда и только тогда, когда
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

В данном листке все переменные по умолчанию принимают только положительные значения. Докажите неравенства.

1.
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

2.
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

3.
$$\frac{12}{a+b+c+d}\leqslant\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\leqslant\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

4.
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

5. Пусть $abc=1$. Докажите, что
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

6. Докажите что для любого набора упорядоченных по возрастанию положительных чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ справедливо неравенство
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2-x_1}+\frac{1}{x_3-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\geqslant\frac{4}{9}\left(\frac{2}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\ldots+\frac{n+1}{x_n}\right).$$