

Подсчет в графах

Часть 1.

1. В классе учатся 15 мальчиков и 15 девочек. Известно, что каждый мальчик дружит с каждой девочкой и еще с 6 мальчиками, а каждая девочка дружит со всеми мальчиками и с 4 девочками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них все школьники дружат, и есть хотя бы одна девочка и один мальчик.
2. В условиях предыдущей задачи найдите число таких различных компаний из двух мальчиков и двух девочек, что в них все школьники дружат.
3. В условиях предыдущей задачи предположим, что нет трёх попарно дружащих мальчиков и нет трёх попарно дружащих девочек. Сколько существует троек детей таких, что хотя бы двое детей из тройки не дружат?

Часть 2.

4. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.
5. Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.
6. В классе учатся несколько человек. Могло ли так оказаться, что у каждого из них ровно 10 друзей, а у каждой пары человек ровно 4 общих друга?
7. В круговом турнире участвовало $2n+1$ команд, оказалось что каждая команда выиграла и проиграла ровно n раз. Назовем тройку команд *сбалансированной*, если в этой тройке каждая команда выиграла и проиграла ровно по одному разу. Найдите количество *сбалансированных* троек.

Часть 3.

8. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причём при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

9. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребенка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.