Формула включений и исключений

Пусть даны n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Выберем k множеств из данных n и пересечем их. Полученное множество называется k–пересечением. Через N_k обозначим сумму мощностей всех k–пересечений. Иными словами говоря,

$$N_k = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

0_1. **Формула включений исключений.** Докажите, что

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = N_1 - N_2 + N_3 - \ldots + (-1)^{n-1} N_n.$$

0_2. Докажите, что

$$N_k - N_{k+1} + N_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k} N_n \geq 0$$

.

1. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

2. Сколько существует способов расставить 20 не бьющих друг друга ладей на шахматной доске 20×20 так, чтобы ровно 10 из них стояли диагонали, начинающейся из левого нижнего угла квадрата?

3. Кирилл, Егор и Ваня решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

4. Шестеро друзей за год побывали в 35 походах. Известно, что каждый сходил в 10 походов, а любые два побывали вместе в 5 походах. Докажите, что найдутся три друга бывшие вместе хотя бы в трех походах.

5. Обозначим $T(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что каждое из них не превосходит n, а их сумма не меньше $2n$. Не используя явную формулу для $T(n)$, докажите, что

$$T(n) = T(a) + T(b) + T(c) - T(a+b-n) - T(b+c-n)-$$

$$-T(a+c-n) + T(a+b+c-2n).$$

6. Сколько существует способов выбрать 20 подмножеств множества чисел от 1 до 100 так, чтобы подмножества (все вместе) не имели общего элемента?

7. Докажите, что количество способов разложить m различных шаров по n ящикам так, чтобы ни один из них не оказался пустым равно

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}C_n^j j^m.$$