Формула включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots$$
$$\ldots - |A_{n-1} \cap A_n| + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

0_1. Пусть элемент a входит ровно в k множеств A_i. Посчитайте, сколько раз он посчитан в левой и правой части формулы. Выведите из этого формулу включений и исключений.

0_2. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

1. Сколько чисел из набора $1, 2, \ldots, 2019, 2020$ не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

2. Найдите количество натуральных делителей числа 10^{60} не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами, ни точными пятыми степенями.

3. Кирилл, Егор и Ваня решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

4. Докажите, что количество чисел взаимно простых с $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и не больших n равно $n \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right)$

5. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

6. Сколько существует способов расставить 20 не бьющих друг друга ладей на шахматной доске 20×20 так, чтобы ровно 10 из них стояли диагонали, начинающейся из левого нижнего угла квадрата?

7. Обозначим $T(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что каждое из них не превосходит n, а их сумма не меньше $2n$. Не используя явную формулу для $T(n)$, докажите, что

$$T(n) = T(a) + T(b) + T(c) - T(a + b - n) - T(b + c - n) -$$
$$-T(a + c - n) + T(a + b + c - 2n).$$

8. Сколько существует способов выбрать 20 подмножеств множества чисел от 1 до 100 так, чтобы подмножества (все вместе) не имели общего элемента?