Квадратный трёхчлен и неравенства

0_1. Докажите, что если $a(a+b+c)<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет 2 корня.

0_2. Докажите неравенство
$$a^4+b^4+c^4 \geqslant 2a^2bc+b^2c^2.$$

1. Известно, что квадратные уравнения $x^2+ax+b=0$ и x^2+cx+d не имеют действительных корней. Верно ли, что и уравнение
$$x^2+\frac{a+c}{2}\cdot x+\frac{b+d}{2}=0$$
также не имеет корней?

2. Верно ли, что если $b>a+c>0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня?

3. Даны вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Пусть
$$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2.$$
Очевидно, что $f(x)\geqslant 0$.

Рассмотрите эту функцию и докажите неравенство **Коши–Буняковского–Шварца**
$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

4. Докажите неравенство
$$7(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant 8a(b+c+d).$$

5. Про квадратные трёхчлены $p(x)$, $q(x)$ и $s(x)$ известно, что каждый из них имеет действительный корень. Могут ли трёхчлены $p(x)+q(x)$, $p(x)+s(x)$ и $q(x)+s(x)$ одновременно не иметь действительных корней?

6. Дан многочлен $P(t)=t^2-6t$. Докажите, что при любых $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$ и $z\geqslant 1$ выполняется $P(x^3+y^3+z^3)\geqslant P(3xyz)$.

7. Докажите, что при любых значениях переменных a, b и c хотя бы одно из уравнений $x^2+bx+c=1$, $x^2+cx+a=1$, $x^2+ax+b=1$ имеет действительный корень.

8. На доске написали квадратное уравнение с положительными коэффициентом при x^2. Каждую минуту на доске записывают новое квадратное уравнение, причём у каждого следующего все три коэффициента на 1 больше соответствующих коэффициентов предыдущего. Докажите, что когда-нибудь на доске появится квадратное уравнение, не имеющее корней.