

Другой взгляд на Виета и не только

1. вещественные числа a , b и c таковы, что $a + b + c > 0$, $ab + ac + bc > 0$ и $abc > 0$. Докажите, что числа a , b и c положительны.
2. Постройте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.
3. Найдите все значения параметра a , при которых корни x_1 , x_2 и x_3 многочлена

$$x^3 - 6x^2 + ax + a$$

удовлетворяют равенству

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

4. Известно, что $x + y + z = a$, и что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}.$$

Докажите, что по меньшей мере одно из чисел x , y и z равно a .

5. Многочлен $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ имеет три различных вещественных корня. Докажите, что многочлен $8t^3 + 8at^2 + 2(a^2 + b)t + (ab - c)$ также имеет три различных вещественных корня.
6. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа, начиная с некоторого, а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел мог назвать Вася?
7. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x) + 2020$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 5.