Теорема Виета и не только

1. Целые числа a, b и c таковы, что числа $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a|=|b|=|c|$.

2. Рациональные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что числа

$$x_1+x_2+\cdots+x_n$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$$

$$\ldots$$

$$x_1x_2\ldots x_n$$

целые. Докажите, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — целые.

3. Известно, что $x+y=u+v$, $x^2+y^2=u^2+v^2$. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $x^n+y^n=u^n+v^n$.

4. Про многочлен $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ с рациональными коэффициентами известно, что $d<0$ и что произведение некоторых двух его различных корней x_1 и x_2 рационально. Докажите, что сумма корней x_1 и x_2 также рациональна.

5. Известно, что многочлены $P(x)=x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0$ и $Q(x)=x^2+q_1x+q_0$ с вещественными коэффициентами таковы, что оба отрицательны внутри некоторого интервала I длины более 2 и положительны вне его. Докажите, что в некоторой точке x_0 выполнено $P(x_0)<Q(x_0)$.

6. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя задумывает некоторый многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Далее делается несколько ходов. За ход Вася платит Пете рубль и называет любое целое число a по своему выбору, которое он ещё не называл, а Петя в ответ говорит, сколько решений в целых числах имеет уравнение $P(x)=a$. Вася выигрывает, как только Петя два раза (не обязательно подряд) назвал одно и то же число. Какого наименьшего числа рублей хватит Васе, чтобы гарантированно выиграть?

7. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n>3$ можно найти многочлен вида $P_n(x)=x^n+\ldots+ax^2+bx+c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

8. Дано множество различных чисел $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ $(n>1)$. Могло ли так оказаться, что множество корней уравнений $x^2-a_ix+b_i=0$ (для всех $i=1,2,\ldots,n$) совпадает с исходным множеством?

9. Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого действительны и также принадлежат M?