Теорема Виета для многочлена

1. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b или c равно 1.

2. Пусть $P(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с n различными целыми корнями, любые два из которых взаимно просты. Докажите, что a_{n-1} и a_n взаимно просты.

3. Целые числа a, b и c таковы, что числа $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

4. Рациональные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что числа

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$\dots$$

$$x_1x_2 \dots x_n$$

целые. Докажите, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — целые.

5. Сумма четырёх чисел равна нулю; сумма обратных к ним тоже равна нулю. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.