Теорема Виета для квадратного трёхчлена

1. Пусть α и β — различные ненулевые корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Докажите, что есть квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и с корнями

(a) α^2 и β^2;

(b) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ и $\dfrac{\beta}{\alpha}$;

(c) α^n и β^n, где n — любое целое (возможно, отрицательное) число.

2. Квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$ имел два действительных корня. Все его коэффициенты (включая старший коэффициент) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трехчлена также увеличились на 1?

3. Различные числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов x^2+ax+b и $x^2 + bx + a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Чему может быть равна сумма этих трёх корней?

4. Сумма коэффициентов квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами оказалась равна одному из его корней, а произведение коэффициентов — другому. Найдите этот трёхчлен.

5. Известно, что каждое из уравнений $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0$, где $b > 0$ и $c > 0$, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений с учётом кратности равно 1. Найдите b и c.

6. Сто последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2 + a_kx + b_k = 0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?