Лексикографический порядок

1. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

2. В обиходе есть монеты номиналом 1 руб, 2 руб, 5 руб и 10 руб. Банкир заключил сделку с дьяволом: каждый день он отдаёт дьяволу одну монету и получает взамен любое количество монет меньшего достоинства по своему выбору. Если монет не останется, банкир проигрывает дьяволу душу. Может ли банкир спасти свою бессмертную душу?

3. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot (p-1)^k/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

4. Каюты на лайнере «Яхонтовая Царевна» расположены ввиде куба $20\times20\times20$, причем в каждой живет ровно по одному пассажиру. Некоторые пассажиры больны коронавирусом. Время от времени кто-то из больных пассажиров либо заражает здорового пассажира из соседней каюты, либо выздоравливает. Ученые установили, что коронавирус не передается снизу вверх, с юга на север и с запада на восток. Кроме того, известно, что у каждого больного пассажира болезнь рано или поздно закончится (но он в дальнейшем может заразиться вновь). Докажите, что рано или поздно все пассажиры поправятся.

5. Сборная Табулистана с 2000 года ежегодно участвует в финале всероссийской олимпиады школьников по математике, которая проводится по параллелям 9, 10, 11 класса. Год n называется *провальным,* если для каждого предыдущего года m существует параллель, по которой в год n сборная Табулистана взяла меньше дипломов, чем в год m. Могут ли все годы участия, начиная с 2001, быть провальными?

6. На доске нарисовано дерево, в одной из вершин которого находится флажок. Для каждой вершины A без флажка через $\gamma(A)$ обозначается первая вершина на пути из A в вершину со флажком. Время от времени Петя подходит к доске и находит вершину A, которая имеет степень как минимум на 2 меньше, чем вершина $B = \gamma(A)$. Затем, если B содержит флажок, Петя перемещает флажок в A. Если же B не содержит флажка, то Петя стирает ребро между B и $C = \gamma(B)$, после чего соединяет C и A. Докажите, что рано или поздно действия Пети прекратятся.

7. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \ldots, n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики(допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

8. 1000 монет разложены на 10 куч. Играют двое. Первый своим ходом выбирает 4 кучи и делит каждую из них на правую и левую (возможно, пустые). После этого второй нетождественно переставляет левые кучи и соединяет их с правыми обратно. В любой момент вместо своего хода первый может забрать любые три кучи и прекратить игру. Докажите, что он сможет обеспечить себе не менее 980 монет.