

Лексикографический порядок

Определение. Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Будем говорить, что $A \succ B$ (или A мажорирует B), если: или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

1. Теорема. Докажите, что

(а) если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$.

(б) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна.

(в) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины n . Такой порядок называется *лексикографическим*. Своё название лексикографический порядок получил по аналогии с сортировкой по алфавиту в словаре.

- Компьютер сортирует массив из 100 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.
- В обиходе есть монеты номиналом 1 руб, 2 руб, 5 руб и 10 руб. Банкир заключил сделку с дьяволом: каждый день он отдаёт дьяволу одну монету и получает взамен любое количество монет меньшего достоинства по своему выбору. Если монет не останется, банкир проигрывает дьяволу душу. Может ли банкир спасти свою бессмертную душу?
- Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot (p - 1)^k / p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x , а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.
- Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.
- Каюты на лайнере «Яхонтовая Царевна» расположены в виде куба $20 \times 20 \times 20$, причем в каждой живет ровно по одному пассажиру. Некоторые пассажиры больны коронавирусом. Время от времени кто-то из больных пассажиров либо заражает здорового пассажира из соседней каюты, либо выздоравливает. Ученые установили, что коронавирус не передается снизу вверх, с юга на север и с запада на восток. Кроме того, известно, что у каждого больного пассажира болезнь рано или поздно закончится (но он в дальнейшем может заразиться вновь). Докажите, что рано или поздно все пассажиры поправятся.
- Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \dots, n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её

(заменить крестик на нолик и нолики на крестики. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

8. Сборная Табулистана с 2000 года ежегодно участвует в финале всероссийской олимпиады школьников по математике, которая проводится по параллелям 9, 10, 11 класса. Год n называется *провальным*, если для каждого предыдущего года t существует параллель, по которой в год n сборная Табулистана взяла меньше дипломов, чем в год t . Могут ли все годы участия, начиная с 2001, быть провальными?