

## Неравенства

В задачах этого листка требуется доказать неравенство для положительных действительных значений переменных, если не указано иного.

1.  $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

2.  $2x + \frac{3}{8} \geq \sqrt[4]{x}$

3.  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

4. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — положительные числа и  $S$  — их сумма. Докажите, что

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n - 1}$$

5. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника, а  $a, b, c$  — соответствующие им стороны. Докажите неравенство

$$a\alpha + b\beta + c\gamma > \frac{1}{2}(a\beta + b\gamma + c\alpha + a\gamma + b\alpha + c\beta)$$

6. Сумма трёх положительных чисел равна 6. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

7. Про числа  $a, b, c$  известно, что  $abc = 1$ . Докажите, что

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3$$

8. Для  $k > 3$  докажите неравенство  $\frac{x_1}{x_k + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_k}{x_{k-1} + x_1} \geq 2$

9.  $(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \dots (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq \sqrt{(n+1)^{n+1}} \cdot \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}$

10. Сумма положительных чисел  $a, b, c, d$  равна 3. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2}$$