

Разной по неравенствам

Неравенства о средних. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — положительные числа. Тогда

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. И пусть c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

1. Для положительных чисел a и b докажите, что

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

2. Докажите, что

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12.$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$(2+a)(2+b)(2+c) \geq 27.$$

5. Положительные числа a и b таковы, что $a+b \leq 2$. Докажите, что

$$\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} \geq 1.$$

6. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{b^3 c} + \frac{b}{c^3 a} + \frac{c}{a^3 b} \geq \frac{2}{b^2 + c^4} + \frac{2}{c^2 + a^4} + \frac{2}{a^2 + b^4}.$$

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

8. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b + c + d = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{a^3 b^3 c^3 d^3}.$$