

Транснеравенство

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. И пусть c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Во всех предложенных задачах подразумевается, что рассматриваемые числа положительны.

1. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

2. Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

3. Докажите неравенство

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

4. Докажите неравенство

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d).$$

5. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

6. Докажите, что:

$$\begin{aligned} & \frac{((a-2)^2 + 2bc)((b-2)^2 + 2ca)}{(c-2)^2 + 2ab} + \frac{((b-2)^2 + 2ca)((c-2)^2 + 2ab)}{(a-2)^2 + 2bc} + \\ & + \frac{((c-2)^2 + 2ab)((a-2)^2 + 2bc)}{(b-2)^2 + 2ca} \geq 8. \end{aligned}$$

7. Зафиксированы наборы чисел $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n > 0$ и $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n > 0$. И пусть c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . При какой перестановке чисел выражение

$$(a_1 + c_1)(a_2 + c_2) \cdots (a_n + c_n)$$

принимает максимальное значение?

8. **Неравенство Чебышева.** Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$