

Транснеравенство

0. Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. И пусть c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

- (а) Докажите транснеравенство для $n = 2$;
 (б) Докажите левую часть транснеравенства;
 (с) Докажите правую часть транснеравенства.

Все неравенства надо доказывать через транснеравенство.

1. Для положительных a, b, c докажите, что

(а)

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc};$$

(б)

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c;$$

(с)

$$ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab};$$

(d)

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

2. Для положительных a_1, a_2, \dots, a_n докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

3. Для положительных чисел докажите неравенство

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d).$$

4. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{3(ab+bc+ac)}{2(a+b+c)}.$$

5. Неравенство Чебышёва. Даны два набора чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$