

Индукция в графах

0. Докажите, что если в связном графе нет нечётных циклов, то вершины графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром.
1. В одной далёкой-далёкой стране некоторые (соседние) города соединены дорогами. Докажите, что президент может в каждый город назначить мэра (рыцаря или лжеца), чтобы на вопрос «есть ли лжецы среди мэров соседних городов» любой мэр отвечал утвердительно.
2. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.
3. **Лемма Турана.** В графе $2n$ вершин и $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в этом графе есть цикл из трёх вершин.
4. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в любую другую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).
5. В графе 2020 вершин. Докажите, что его рёбра можно покрасить в 1010 цветов так, чтобы не было циклического маршрута, в котором все рёбра покрашены в один цвет.
6. Постройте связный граф на $6n$ вершинах, все степени которого равны 3 так, чтобы в нём не было полных подграфов на 3 вершинах.
7. В графе n вершин. В каждой из них лежит некоторое количество монет. За один ход разрешается переложить некоторое количество монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что из любого расположения монет можно сделать любое другое не более чем за $n - 1$ ходов.