

Хроматическое число графа

Пусть G — конечный граф без петель и кратных ребер. *Правильная раскраска* графа G — это такое разбиение вершин на несколько множеств, что никакие две смежные вершины не принадлежат одному множеству. Наименьшее возможное число множеств в таком разбиении называется *хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi(G)$. Через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ будем обозначать максимальную и минимальную степень вершины графа G соответственно.

1. Найдите хроматическое число **(а)** полного графа K_n ; **(б)** цикла длины n ; **(с)** дерева.
2. Для любого графа G докажите, что

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

3. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d$. Докажите, что вершины связного графа G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если
(а) в графе есть вершина, степень которой меньше d ;
(б) в графе есть вершина, при удалении которой он теряет связность.
4. В связном графе 1000 вершин, причем степень каждой из них не более 9. Докажите, что в этом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее **(а)** 200 вершин; **(б)** 222 вершин.
5. Докажите, что из любого графа можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов.
6. Хроматическое число графа равно n и его вершины правильным образом раскрашены в n цветов. Цвета занумерованы числами от 1 до n . Докажите, что существует цепь из n вершин, в которой встречаются все n цветов, причем в порядке возрастания номеров.
7. (*Лемма о хроматическом ядре.*) Докажите, что в любом графе G существует подграф H такой, что

$$\delta(H) \geq \chi(G) - 1.$$

8. Пусть в графе G число ребер равно m . Докажите, что

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

9. Пусть граф G связан, $\Delta(G) \geq 3$, и в графе есть две вершины при одновременном удалении которых он теряет связность. Докажите, что $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
10. (*Теорема Брукса.*) Пусть граф G связан, $\Delta(G) \geq 3$, и в графе есть две несмежные вершины. Докажите, что $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
11. Найдите все связные графы, для которых $\chi(G) > \Delta(G)$.