Увидеть граф

1. Есть 100 болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

2. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

3. Муравей ползает по поверхности кубика $11 \times 11 \times 11$ вдоль диагоналей квадратиков 1×1 (поворачивать в центре клетки нельзя). Могло ли так оказаться, что он побывал в центре каждого квадратика ровно один раз?

4. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета – видны 9 кубиков фигуры);
- переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

5. В каждой клетке таблицы $n \times n$ написано одно из чисел 0, 1 или -1 так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одно число 1 и ровно одно число -1. Разрешается поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице заменились на противоположные.

6. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связным*, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

7. У сломанного циркуля нельзя изменить расстояние между концами ножек. Пете удалось поставить циркуль так, что его концы оказались в двух узлах клетчатой бумаги. Петя шагает циркулем, поочередно оставляя одну ножку на бумаге, а другую перенося в новый узел. Может ли Петя вернуть циркуль в исходные точки так, чтобы ножки поменялись местами?

8. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток Т-тетрамино (четырехклеточная фигура в виде буквы Т) — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)