

Увидеть граф

1. Есть 100 болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?
2. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.
3. На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 101 прыжок?
4. Муравей ползает по поверхности кубика $11 \times 11 \times 11$ вдоль диагоналей квадратиков 1×1 (поворачивать в центре клетки нельзя). Могло ли так оказаться, что он побывал в каждом квадратике ровно один раз?
5. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?
6. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:
 - со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета – видны 9 кубиков фигуры);
 - переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?
7. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?
8. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток Т-тетрамино (четырёхклеточная фигура в виде буквы Т) — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)