Китайская теорема об остатках. Продолжение.

8. Дано натуральное n и различные целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geqslant 2)$ от 1 до n. Известно, что n делит $a_i(a_{i+1} - 1)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Докажите, что n не делит $a_k(a_1 - 1)$.

9. Докажите, что для каждого натурального n существует n подряд идущих натуральных чисел, ни одно из которых не является натуральной степенью натурального числа.

10. Докажите, что
(a) множество простых делителей чисел вида $t^2 + t + 1$ бесконечно;
(b) существует t такое, что $t^2 + t + 1$ имеет хотя бы 2020 различных простых делителей.

11. При изготовлении елочной гирлянды электрик Петров сделал на куске провода отметки, делящие его на 113 одинаковых кусков, и ушел погулять. В это время электрик Иванов разметил тот же провод на 137 одинаковых кусков и пошел туда же. В это время вернувшийся с прогулки электрик Сидоров быстро разрезал провод по всем отметкам. Куски какого размера у него получились, и сколько получилось кусков каждого вида?

12. Пусть p и q — два простых числа, отличающихся не более чем в два раза. Докажите, что существуют два последовательных натуральных числа, у одного из которых наибольший простой делитель равен p, а у другого — q.

13. Дано натуральное число n. Известно, что существуют такие пять последовательных натуральных чисел, что ни одно из них не делится на n, но их произведение кратно n. Докажите, что существуют такие четыре последовательных натуральных числа, что ни одно из них не делится на n, но их произведение кратно n.