Китайская теорема об остатках. Вступление.

Теорема. Пусть m_1, m_2, $\ldots$, m_n — попарно взаимно простые числа, a_1, a_2, $\ldots$, a_n — некоторый набор остатков по соответствующим модулям. Тогда существует такое A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Более того, все такие A сравнимы по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$.

1. Пусть p и q — различные нечетные простые числа. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$ среди чисел от 0 до $pq-1$?

2. Пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, где p_i — различные простые числа. Для каждого t: $1 \leqslant t \leqslant s$ найдите, сколько существует чисел от 1 до N, которые делятся на p_1, p_2, $\ldots$, p_t, но не делятся на p_{t+1}, p_{t+2}, $\ldots$, p_s.

3. Докажите, что найдутся 2020 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет по меньшей мере три различных простых делителя.

4. Докажите, что любые 35 подряд идущих целых чисел можно расставить в прямоугольнике 7×5 так, что разность чисел, стоящих в любых двух соседних по стороне клетках, делится или на 7, или на 5.

5. Известно, что число t имеет остаток 80 при делении на 97 и остаток 18 при делении на 1001. Найдите остаток от деления t на 97097. *Ваше решение должно показывать, откуда взялся ваш ответ.*

6. Дано конечное множество A натуральных чисел. Докажите, что сущестует натуральное число b такое, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью натурального числа.

7. Пусть n — натуральное число, а $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа. Обозначим через P_m произведение первых m из них. Докажите, что существует натуральное число k такое, что для каждого i от 1 до n числа P_n и $k + P_i$ взаимно просты.