Теория чисел с комбинаторными мотивами

1. Вася вписал в клетки таблицы 4×18 натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Сначала он нашел произведение чисел, стоящих в каждом столбце, а затем у каждого из 18 полученных произведений вычислил сумму цифр. Могли ли все получившиеся суммы оказаться одинаковыми?

2. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.

3. Шесть игральных костей нанизали на спицу так, что каждая может вращаться независимо от остальных (протыкаем через центры противоположных граней). Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях костей. Докажите, что можно так повернуть кости, чтобы это число делилось на 7. (На гранях стоят цифры от 1 до 6, сумма цифр на противоположных гранях равна 7.)

4. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если
(a) $l = 9$;
(b) l — нечетное число, не делящееся на 5.

5. Теннисист для тренировки играет каждый день хотя бы одну партию; при этом, чтобы не перетрудиться, он играет не более 12 партий в неделю. Докажите, что можно найти несколько таких подряд идущих дней, в течение которых теннисист сыграл ровно двадцать партий.

6. **(a)** У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (n — натуральное) возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2.
(b) Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
(c) Из двухсот чисел: $1, 2, 3, \ldots, 199, 200$ выбрали одно число, меньшее 16, и ещё 99 чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два таких, одно из которых делится на другое.

ТЧ: Для тех, кому мало

1. Существует ли такое натуральное N, что в любой арифметической прогрессии из N целых чисел найдётся элемент, делящийся на простое число, большее 100000.

2. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ad \neq bc$ и НОД$(a, b, c, d) = 1$. Докажите, что множество чисел вида НОД$(an+b, cn+d)$ с натуральным n это в точности множество натуральных делителей некоторого натурального числа.

3. Докажите, что для любого простого числа p натуральных чисел k, таких что $k! + 1$ делится на p, не более $(6p)^{\frac{2}{3}}$.

4. Натуральные числа x, y таковы, что при любом натуральном k число $x^{2^k} - 1$ делится на $2^k y + 1$. Докажите, что $x = 1$.

5. Для натурального k обозначим через $S(k)$ сумму цифр десятичной записи числа k. Докажите, что существует такое k без девяток в десятичной записи, что $S(2^{24^{2020}} k) = S(k)$.