Метод Штурма

Метод Штурма обычно используется для доказательства неравенств с несколькими переменными.

Основная его идея заключается в следующем: менять одновременно две переменные, сохраняя их сумму (или произведение) так, чтобы при этом одна из частей неравенства всегда изменялась в одну сторону. Обычно переменные либо пытаются сделать равными, либо наоборот — раздвинуть как можно дальше друг от друга.

0. У Арсения было два положительных числа a и b. Арсений заменил их на два новых числа c и d такие, что $a+b=c+d$, $|a-b|>|c-d|$. Как изменятся значения следующих выражений:
(a) ab;
(b) a^2+b^2;
(c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;
(d) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$?
(e) Пусть положительные числа удовлетворяют неравенству $a<c<d<b$. Тогда если $ab=cd$, то $a+b>c+d$.

1. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\geqslant 2^n$, где $x_1x_2...x_n=1$, $x_i>0$.

2. Докажите для положительных $x_1,x_2,...,x_n$ неравенства между средними (слева направо: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$$

3. Пусть сумма положительных $x_1,x_2,...,x_n$ равна 1. Докажите, что

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)}{x_1x_2...x_n}\geqslant(n-1)^n$$

4. **(a)** Пусть $x_1,x_2,...,x_n\geqslant 1$ и $n\geqslant 2$. Докажите, что $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}$.

(b) Пусть $1\geqslant x_1,x_2,...,x_n\geqslant 0$ и $n\geqslant 2$. Докажите, что $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}\leqslant\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}$.

5. Докажите, что $0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant 7/27$, при $x,y,z\geqslant 0$ и $x+y+z=1$.

6. Пусть сумма положительных чисел $x_1,x_2,...,x_n$ равна 1. Докажите, что

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)}\geqslant\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

7. Докажите, что

$$\frac{1}{1+s-x_1}+\frac{1}{1+s-x_2}+...+\frac{1}{1+s-x_n}\leqslant 1,$$

где $s=x_1+x_2+...+x_n$, $x_1x_2...x_n=1$, $x_1,x_2,...,x_n\geqslant 0$.

8. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного n-угольника.

9. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим является периметр правильного n-угольника.

10. Докажите, что среди всех выпуклых многоугольников, вписанных в данную окружность, правильный треугольник обладает наибольшей суммой квадратов сторон.