

## Неравенства между средними для двух переменных

Мы будем рассматривать неравенства из цепочки  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$  для неотрицательных значений переменных  $a, b$ . Эти неравенства очень просто доказываются, но их можно успешно применять в доказательстве сложных неравенств от большего числа переменных. Для этого важно понимать следующее.

А) Каждое из этих неравенств превращается в равенство тогда и только тогда, когда  $a = b$ .

Б) Эти неравенства часто удобнее применять не в исходных формулировках, а в других. Например, в следующих:  $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy, x + \frac{1}{x} \geq 2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

## Задачи

1. Найдите все решения уравнения  $x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}} = 1 + x^{2020}$
2. Пусть произведение положительных чисел  $a, b, c$  равно 1. Докажите, что

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}.$$

3. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют неравенству  $abc \geq ab + ca + bc$ . Докажите, что

$$\sqrt{abc} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

4. Докажите, что для любых положительных чисел  $a, b, c, d$  выполнено неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

5. Пусть положительные числа  $a, b, c$  в сумме дают 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

6. В треугольнике,  $r$  — радиус вписанной окружности. Найдите наименьшее возможное значение суммы его высот. Для каких треугольников это значение достигается?

7. Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $O$ . Пусть  $d_a, d_b, d_c$  — расстояния от нее до прямых  $BC, CA, AB$ . При каком положении точки  $O$  произведение  $d_a d_b d_c$  будет наибольшим?
8. Из точки  $M$ , лежащей внутри данного треугольника  $ABC$ , опущены перпендикуляры  $MA_1, MB_1, MC_1$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Для каких точек  $M$  внутри данного треугольника  $ABC$  величина  $\frac{a}{MA_1} + \frac{b}{MB_1} + \frac{c}{MC_1}$  принимает наименьшее значение?
9. Числа  $a, b, c$  лежат в интервале  $(0, 1)$ . Докажите, что

$$a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + 2\sqrt{abc}.$$

10. На квадратный лист бумаги со стороной  $a$  посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Оказалось, что каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы. Докажите, что суммарная площадь клякс не больше  $a$ .