

## Принцип отражения

В этом листочке мы будем рассматривать все пути из точки  $(0, 0)$ , состоящие из  $2n$  отрезков, идущих по диагоналям клеток вправо-вверх или вправо-вниз.

0. Докажите, что количество путей, не содержащих точек из нижней полуплоскости с концом в точке  $(2n, 0)$ , равно  $C_n$ .
1. (a) *Принцип отражения.* Докажите, что количество путей с концом в точке  $(2n, -2)$ , равно количеству путей с концом в  $(2n, 0)$ , имеющих точки в нижней полуплоскости.  
  
(b) Докажите, что для любого натурального  $k$  количество путей с концом в точке  $(2n, -2k - 2)$ , равно количеству путей с концом в  $(2n, 2k)$ , имеющих точки в нижней полуплоскости.
2. Пользуясь предыдущими задачами докажите, что  $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$ .
3. Докажите, что количество путей с концом в точке  $(2n, 0)$  равно:
  - (a) количеству путей, не пересекающих ось абсцисс (кроме начала пути);
  - (b) количеству путей, пересекающих ось абсцисс ровно в двух точках (с учетом начала пути);
  - (c) количеству путей, не имеющих точек в нижней полуплоскости.
4. Пусть  $k$  — натуральное число. Докажите, что путей, имеющих максимум  $y = k$ , столько же, сколько путей, оканчивающихся в точке  $(2n, k)$  или  $(2n, k + 1)$ .