

Принцип отражения

В этом листочке мы будем рассматривать все пути из точки $(0, 0)$, состоящие из $2n$ отрезков, идущих по диагоналям клеток вправо-вверх или вправо-вниз.

0. Докажите, что количество путей, не содержащих точек из нижней полуплоскости с концом в точке $(2n, 0)$, равно C_n .
1. (a) *Принцип отражения.* Докажите, что количество путей с концом в точке $(2n, -2)$, равно количеству путей с концом в $(2n, 0)$, имеющих точки в нижней полуплоскости.

(b) Докажите, что для любого натурального k количество путей с концом в точке $(2n, -2k - 2)$, равно количеству путей с концом в $(2n, 2k)$, имеющих точки в нижней полуплоскости.
2. Пользуясь предыдущими задачами докажите, что $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$.
3. Докажите, что количество путей с концом в точке $(2n, 0)$ равно:
 - (a) количеству путей, не пересекающих ось абсцисс (кроме начала пути);
 - (b) количеству путей, пересекающих ось абсцисс ровно в двух точках (с учетом начала пути);
 - (c) количеству путей, не имеющих точек в нижней полуплоскости.