

## Числа Каталана

**Определение** *Правильной скобочной последовательностью* длины  $2n$  называется последовательность, состоящая из  $n$  открывающихся и  $n$  закрывающихся скобок, такая что среди любых первых  $k$  скобок открывающихся скобок не меньше чем закрывающихся.

При  $n = 3$  существует 5 таких последовательностей  $()()()$ ,  $((()))$ ,  $()(())$ ,  $(())()$ ,  $((()))$ .

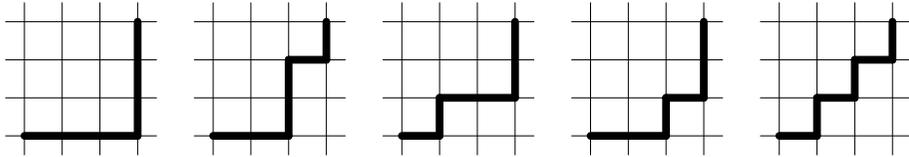
**Определение**  $C_n$  ( $n$ -е число Каталана) — это количество правильных скобочных последовательностей длины  $2n$ .

1. Докажите рекуррентную формулу для чисел Каталана

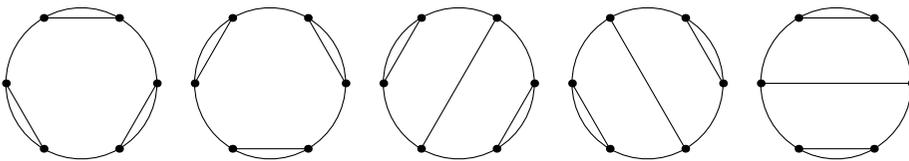
$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$$

2. Найти количество:

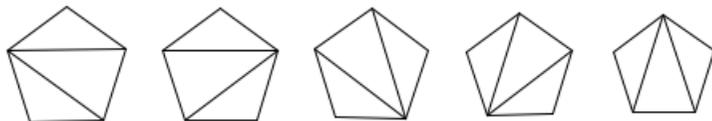
(а) Докажите, что количество путей из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, n)$  по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой  $y = x$ , равно  $C_n$ .



(б) способов соединить  $2n$  точек на окружности  $n$  непересекающимися хордами;



(с) способов разбить выпуклый  $n$ -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями;



(d) Докажите, что количество упорядоченных корневых деревьев (то есть деревьев, у которых задан корень и для каждой вершины задан порядок ее потомков) с  $n + 1$  вершинами равно  $C_n$



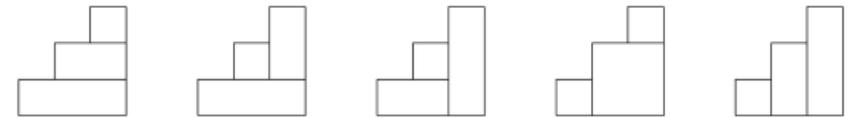
3. Докажите, что количество последовательностей натуральных чисел таких, что  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , где  $a_i \leq i$  равно  $C_n$ .

1 1 1      1 1 2      1 1 3      1 2 2      1 2 3

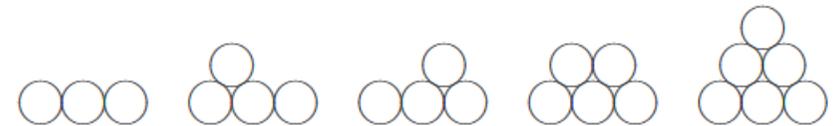
4. Докажите, что количество последовательностей целых чисел  $a_1, \dots, a_n$ , таких что  $a_1 = 0$  и  $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$  равно  $C_n$ .

0 0 0      0 0 1      0 1 0      0 1 1      0 1 2

5. Докажите, что количество способов разбить на  $n$  прямоугольников лестницу ширины и высоты  $n$  равно  $C_n$ .



6. Найти количество способов разложить монеты на плоскости так, чтобы в нижнем ряду было  $n$  монет.



7. Найти количество последовательностей  $a_1, \dots, a_n$  в которых каждое число от 1 до  $n$  встречается ровно по 1 разу и длина любой убывающей подпоследовательности меньше 3.

1 2 3      1 3 2      2 1 3      2 3 1      3 1 2

8. Найти количество неотрицательных последовательностей  $a_1, \dots, a_n : a_1 = 0, a_j =$  количеству  $i < j$  таких, что  $a_i < a_j$ .

0 0 0      0 0 2      0 1 0      0 1 1      0 1 2