

Числа Каталана

Определение *Правильной скобочной последовательностью* длины $2n$ называется последовательность, состоящая из n открывающихся и n закрывающихся скобок, такая что среди любых первых k скобок открывающихся скобок не меньше чем закрывающихся.

При $n = 3$ существует 5 таких последовательностей $()()()$, $((()))$, $()(())$, $(())()$, $((()))$.

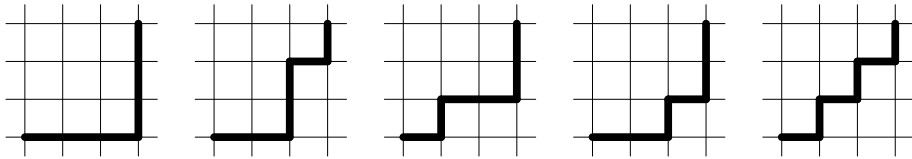
Определение C_n (n -е число Каталана) — это количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$.

1. Докажите рекуррентную формулу для чисел Каталана

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$$

2. Найти количество:

(а) Докажите, что количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой $y = x$, равно C_n .



(б) таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$ таких, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают;

1	2	3
4	5	6

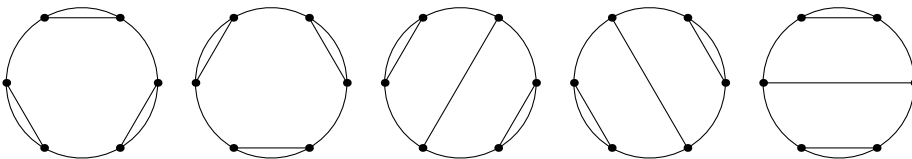
1	2	4
3	5	6

1	3	4
2	5	6

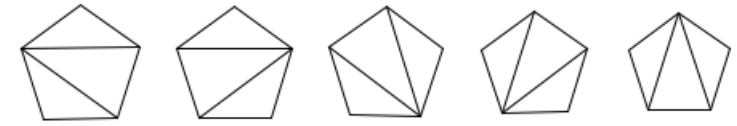
1	2	5
3	4	6

1	3	5
2	4	6

(в) способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами;



(д) способов разбить выпуклый n -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями;



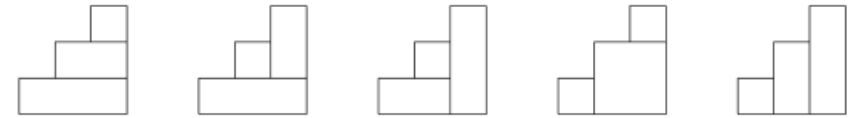
3. Докажите, что количество последовательностей натуральных чисел таких, что $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, где $a_i \leq i$ равно C_n .

1 1 1 1 1 2 1 1 3 1 2 2 1 2 3

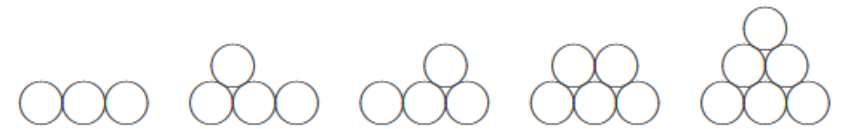
4. Докажите, что количество последовательностей целых чисел a_1, \dots, a_n , таких что $a_1 = 0$ и $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$ равно C_n .

0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 2

5. Докажите, что количество способов разбить на n прямоугольников лестницу ширины и высоты n равно C_n .



6. Найти количество способов разложить монеты на плоскости так, чтобы в нижнем ряду было n монет.



7. Найти количество последовательностей a_1, \dots, a_n в которых каждое число от 1 до n встречается ровно по 1 разу и длина любой убывающей подпоследовательности меньше 3.

1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2