Целочисленный Безу

1. **(Следствие из теоремы Безу)** Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $Q(a) - Q(b) \vdots (a - b)$ для любых целых различных a и b.

2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2019$, $P(2019) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k.

3. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

4. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.

6. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с **натуральными** коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, $\ldots$, $P(k+2019)$ будут составными.

7. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

8. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

9. Докажите, что если некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в 2020 целых точках значения среди целых чисел от 1 до 2019, то эти значения равны.