

Целочисленный Безу

1. (**Следствие из теоремы Безу**) Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $Q(a) - Q(b) : (a - b)$ для любых целых различных a и b .
2. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.
3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2019$, $P(2019) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k .
4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при некоторых целых x принимает значения 1, 2 и 3. Доказать, что существует не более одного целого x , при котором значение этого многочлена равно 5.
5. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.
6. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
7. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.
8. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с **натуральными** коэффициентами найдется такое целое число k , что числа $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2019)$ будут составными.