Теорема Безу

Определение. *Многочленом степени* n называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ — действительные числа называемые *коэффициентами многочлена*, $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом*. Степень многочлена f обозначается $\deg f$.

Определение. Многочлен A *делится* на ненулевой многочлен B, если существует многочлен Q, называемый *частным* такой, что $A = B \cdot Q$.

Определение. Разделить многочлен A на ненулевой многочлен B с остатком — это найти многочлены Q, R такие, что выполнено равенство $A = B \cdot Q + R$, причем $\deg R < \deg B$ или $R = 0$. Многочлен Q называется *неполным частным*, многочлен R называется *остатком*.

1. **(a) (Теорема Безу)** Докажите, что остаток от деления многочлена P на $(x-a)$ равен $P(a)$:
$$P(x) = H(x) \cdot (x-a) + P(a).$$

(b) (Следствие) Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x-a)$.

2. **(a)** При каких значениях параметра a многочлен $P(x) = x^n + ax^{n-2}$ $(n \geqslant 2)$ делится на $x-2$?
(b) При каких a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на $(x-1)(x-2)$?

3. Многочлен $x^3 + px^3 + qx + r$ имеет на интервале $(0, 2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

4. Дан многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Известно, что каждое из уравнений $f(x) = 1$ и $f(x) = 2$ имеет четыре корня. Докажите, что если для корней первого уравнения выполняется равенство $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, то и для корней второго уравнения выполняется аналогичное равенство.

5. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2019$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2019) > \dfrac{1}{64}$.

6. Существует ли многочлен P степени 1000 такой, что $P(x^2 + 4x + 2)$ делится на $P(x)$?

7. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2 + Q^2 = R^2$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

8. Найдите все многочлены $P(x)$, такие, что для каждого x выполняется

$$(x+100)P(x) - xP(x+1) = 1.$$