

Треугольник Паскаля

1. (а) Докажите, что

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0.$$

- (б) Докажите, что

$$C_n^0 C_n^1 + C_n^1 C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} C_n^n = C_{2n}^{n-1}$$

2. Пусть a – число в треугольнике Паскаля. Докажите, что сумма всех чисел, находящихся внутри параллелограмма, ограниченного сторонами треугольника и диагоналями, проходящими через a , равна $a - 1$. (Например, $6 - 1 = 1 + (1 + 1) + 2$)
3. Пусть F_n – n -е число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$). Докажите, что

$$F_1 C_n^1 + F_2 C_n^2 + \dots + F_n C_n^n = F_{2n}.$$

4. В строку выписаны числа от 1 до 2000 в порядке возрастания. В каждый промежуток между соседними числами вписали их сумму, а затем изначальные числа стёрли. Операцию повторяли, пока не осталось одно число. Какое?
5. Докажите, что НОД тройки чисел

$$C_{n-1}^k, C_n^{k-1}, C_{n+1}^{k+1}$$

равен НОДу тройки чисел

$$C_{n-1}^{k-1}, C_n^{k+1}, C_{n+1}^k.$$

6. Червяк Веня любит есть треугольник Паскаля. Начиная с верхней единицы он каждую минуту съедает соседнее число, занимая его место. При этом Веня хочет, чтобы для любых съеденных чисел a, b число $a + b$ съедено не было. Докажите, что Веня может съесть 100000 чисел в первых 2011 строках (при этом Вене не запрещается опускаться ниже 2011 строки). Соседними к числу C_n^k называются числа $C_n^{k\pm 1}, C_{n\pm 1}^k, C_{n+1}^{k+1}, C_{n-1}^{k-1}$.
7. (а) Пусть p – простое число. Докажите, что в N -й строке нет чисел, делящихся на p , тогда и только тогда, когда N представимо в виде $p^s q - 1$, где s, q – целые числа, $s \geq 0, 0 < q < p$.

- (б) Докажите, что в N -й строке треугольника Паскаля содержится ровно

$$T_p(N) = (a_n + 1)(a_{n-1} + 1) \dots (a_0 + 1)$$

чисел, не делящихся на p , где $N = a_n p^n + \dots + a_0$.