Степень вхождения простого

1. Незнайка хочет записать по кругу 12345 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Знайка утверждает, что это невозможно. Прав ли Знайка?

2. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.

3. Даны натуральные числа a и b, причем $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

4. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

5. Дано 41 различное натуральное число, меньшее 1000. Известно, что среди любых трех из них есть два, дающих в произведении точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

6. Решите в натуральных числах уравнение $(n + 1)(2n + 1) = 10m^2$.

7. Натуральное число b назовем удачным, если для любого натурального a, такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество удачных чисел, которые не превосходят 2019.

8. Имеется шоколадка $m \times n$. Горностай и ласка, делая ходы по очереди, играют в следующую игру. Первым ходом горностай разламывает шоколадку на две части по прямой вдоль одного из углублений. Каждым следующим ходом игрок один из двух кусков шоколадки съедает, а другой разламывает на две части. Побеждает тот, после чьего хода в игре останутся две единичные дольки. При каких значениях m и n горностай может победить независимо от действий ласки?