Балакин А. А., Гусев А. С., Захаров Д. А., Кушнир А. Ю., Ретинский В. И.
группа: 7 класс *18 апреля 2020 г.*

Алгебраические тождества. Решения

1. Докажите, что любое нечетное число представляется в виде разности квадратов целых чисел.

Решение. $2n+1=(n+1)^2-n^2$.

2. Пусть известно, что $a+\frac{1}{a}$ – целое число. **(a)** Докажите, что $a^2+\frac{1}{a^2}$ – целое число. **(b)** Докажите, что $a^n+\frac{1}{a^n}$ – целое число для любого натурального n.

Решение. a) $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2$ — целое.
b) Доказательство по индукции. Переход: $(a^n+\frac{1}{a^n})(a+\frac{1}{a})=(a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}})+(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}})$. То есть мы сделали переход от $n-1$ и n к $n+1$, и в качестве базы нужно проверить $n=1$ и $n=2$. Первое известно из условия, второе — из пункта a.

3. Докажите, что если к произведению четырех последовательных чисел прибавить единицу, то получится точный квадрат.

Решение. $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$.

4. Докажите, что число n^4+4 – составное для любого $n>1$.

Решение. $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$. При $n>1$ оба множителя больше 1.

5. Известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Докажите, что среди a, b и c есть 2 числа, в сумме дающие 0.

Решение.
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$$
$$(a+b)(ab+bc+ca)+(a+b)c^2=0$$
$$(a+b)(c^2+bc+ac+ab)=0$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

6. **(a)** Докажите, что для любых различных чисел a_1, a_2 можно так подобрать числа A_1 и A_2, что будет выполняться тождество
$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}$$

(b) Докажите, что для любых попарно различных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ можно так подобрать числа $A_1,A_2,\ldots,A_n$, что будет выполняться тождество
$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x+a_n}$$

Решение. a) Приведём к общему знаменателю, получится

$$\frac{A_1(x+a_2)+A_2(x+a_1)}{(x+a_1)(x+a_2)}=\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)},$$

откуда следует система уравнений

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ A_1a_2+A_2a_1=1. \end{cases}$$

Решая ее, находим $A_1=\frac{1}{a_2-a_1}$, $A_2=\frac{1}{a_1-a_2}$.
b) Докажем индукцией по n. База $n=1$ есть. Переход от $n=k$ к $n=k+1$. Хотим доказать:

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_{k+1})}=\frac{\hat{A}_1}{x+a_1}+\frac{\hat{A}_2}{x+a_2}+\dots+\frac{\hat{A}_{k+1}}{x+a_{k+1}}. \tag{1}$$

По предположению индукции для чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$:

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}+\dots+\frac{A_k}{x+a_k}. \tag{2}$$

Разделим обе части на $(x+a_{k+1})$:

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_{k+1})}=\frac{A_1}{(x+a_1)(x+a_{k+1})}+\dots+\frac{A_k}{(x+a_k)(x+a_{k+1})}. \tag{3}$$

Теперь воспользуемся пунктом a), представим каждую дробь как

$$\frac{A_m}{(x+a_m)(x+a_{k+1})}=\frac{B_m}{x+a_m}+\frac{C_m}{x+a_{k+1}}, \tag{4}$$

и, просуммировав по m, получим требуемое разложение.
На этом решение окончено, но давайте явно найдём $\hat{A}_m$. Суммируя равенства (4), для каждого $m=1,2,\dots,k$ дробь со со знаменателем $x+a_m$ встретится лишь однажды. Напротив, дробь со знаменателем $x+a_{k+1}$ будет встречаться в каждом разложении. Следовательно,

$$\hat{A}_1=B_1, \qquad \hat{A}_2=B_2, \qquad \dots, \qquad \hat{A}_k=B_k, \qquad \hat{A}_{k+1}=C_1+C_2+\dots+C_k \tag{5}$$

Из равенства (4), а также решения пункта a), получаем

$$B_m=\frac{A_m}{a_{k+1}-a_m}, \qquad\qquad C_m=\frac{A_m}{a_m-a_{k+1}} \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) следует, например, что

$$\hat{A}_1=\frac{A_1}{a_{k+1}-a_1}.$$

Тогда по индукции легко получить, что

$$A_1 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)}.$$

Из симметрии же понятно, как будут выглядеть остальные A_m:

$$A_m = \frac{1}{(a_1 - a_m)(a_2 - a_m)\dots(a_{m-1} - a_m)(a_{m+1} - a_m)\dots(a_n - a_m)}.$$

7. Докажите, что если $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$, то и $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$.