Факториалы и степень вхождения. Решения

Обозначим через $\mathrm{ord}_p(n)$ степень вхождения простого p в число n.

1. Сколькими нулями оканчивается число 100! ?

Ответ: 24.

2. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число $(n+1)(n+2)\dots(2n)$.

Ответ: n.
Решение 1. Докажем по индукции (можно и комбинаторно, см. задачу 5 из листка "Сколькими способами"), что $(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n(2n-1)!!$, где $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 1$. База очевидна. Переход: $(n+2)(n+3)\dots(2n+1)(2n+2) : (n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = 2(2n+1) = 2^{n+1}(2n+1)!! : 2^n(2n-1)!!$.
Решение 2. $(n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{(2n)!}{n!}$. Воспользовавшись 5-ой задачей, получаем $\mathrm{ord}_p(\frac{(2n)!}{n!}) = \mathrm{ord}_p((2n)!) - \mathrm{ord}_p(n!) = ([\frac{2n}{2}] + [\frac{2n}{4}] + [\frac{2n}{8}] + \dots) - ([\frac{n}{2}] + [\frac{n}{4}] + [\frac{n}{8}] + \dots) = [\frac{2n}{2}] + ([\frac{2n}{4}] - [\frac{n}{2}]) + ([\frac{2n}{8}] - [\frac{n}{4}]) + \dots = n$.

3. **(a)** Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.
(b) Докажите, что наибольшая степень двойки, на которую делится число $n!$, равна $n - S_2(n)$, где $S_2(n)$ — сумма цифр в двоичной записи числа n.

Доказательство. "Хитрая индукция". Очевидно, что утверждение верно для $n = 1$. Достаточно показать, что если утверждение верно при $n = k$, то оно верно при $n = 2k$, а также, что если утверждение верно для $n = 2k$, то оно верно для $n = 2k+1$. Действительно, $\mathrm{ord}_2((2k)!) = \mathrm{ord}_2(k!) + \mathrm{ord}_2(\frac{(2k)!}{k!}) = k - S_2(k) + k = 2k - S_2(2k)$, а также $\mathrm{ord}_2((2k+1)!) = \mathrm{ord}_2((2k)!) = 2k - S_2(2k) = (2k+1) - S_2(2k+1)$.

4. Пусть p — простое число. Докажите, что степень вхождения p в $n!$ равна

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

5. Пусть p — простое число. Докажите, что степень вхождения p в C_n^k равна числу переносов при сложении чисел k и $n-k$ в p-ичной системе счисления.

Указание. $\left[\frac{n}{p^a}\right] - \left[\frac{k}{p^a}\right] - \left[\frac{n-k}{p^a}\right] \in \{0, 1\}$, при этом это выражение равно единице, если при сложении k и $n-k$ в p-ичной системе есть переход через a разряд, и 0 иначе.

6. Пусть p— простое, и C_n^k делится на p^a. Докажите, что $n \geqslant p^a$.