

Периодичность и зацикливание

1. Докажите, что сумма двух периодических последовательностей также периодична.
2. (а) Пусть m и n являются периодами одной и той же последовательности. Докажите, что $m + n$ и $m - n$ также являются периодами этой последовательности.
(б) Докажите, что любой период последовательности делится на минимальный период.
3. Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}$ ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).
(а) Докажите, что последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на 2019 периодична без предпериода.
(б) Докажите, что найдется такое n , что F_n делится на 2019.
(с) Можно ли найти такое n , что F_n и F_{n+1} делятся на 2019?
4. В числовой последовательности 2, 2, 4, 7, 5, 8, 4, 4, . . . каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов. Докажите, что в этой последовательности встретится участок 2, 0, 1, 9.
5. Метеорологическая служба Цветочного города следит за погодой уже сто лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи доказали, что погода на следующий день однозначно определяется (по какому-то загадочному принципу) погодой в предыдущие семь дней. Последняя неделя в Цветочном городе была полностью солнечная. Докажите, что в будущем снова встретится полностью солнечная неделя.
6. В Тридесятом Королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что в какой-то момент он проедет ту же дорогу, что и в самый первый раз, при этом в том же направлении.
7. По кругу стоят несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.