

Поиск во тьме

1. Три поросенка, Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф, хранят в жестяной коробке красные, желтые и зеленые леденцы. Какое наименьшее число леденцов надо взять наугад из коробки, чтобы каждому поросенку обязательно достались пять леденцов одного цвета?
2. В темном чулане 2 гнома хранят вперемешку колпаки k разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил m_1 колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад такое минимально число колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулся второй гном, и второй гном попросил m_2 колпаков одного цвета, причем $m_1 \geq m_2$. Чтобы выполнить просьбы обоих гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан.
 - (a) Докажите, что если $m_1 = m_2$, то при любом числе цветов k существует случай, в котором Белоснежка сходит в чулан ещё раз.
 - (b) Пусть теперь $m_1 > m_2$. Докажите, что если $k \geq \frac{m_1}{m_1 - m_2}$, то Белоснежке не пришлось бы возвращаться в чулан.
 - (c) Докажите, что если $m_1 > m_2$ и $k < \frac{m_1}{m_1 - m_2}$, то существует случай, в котором Белоснежке пришлось сходить в чулан ещё раз.
3. В темном чулане N гномов хранят вперемешку колпаки k разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил m_1 колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад столько колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулись остальные гномы, и второй гном попросил m_2 колпаков одного цвета, третий — m_3 , ..., N -ый — m_N , причем $m_1 > m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_N$. Чтобы выполнить просьбы всех гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан.
 - (a) Докажите, что если для любого t верно $k \geq \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_t}{m_1 - m_{t+1}}$, то Белоснежке не пришлось бы возвращаться в чулан.
 - (b) Докажите, что если найдется t такое что $k < \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_t}{m_1 - m_{t+1}}$, то существует случай, в котором Белоснежке пришлось сходить в чулан ещё раз.
 - (c) Пусть известно, что $m_t > m_{t+1}$ для любого t . Докажите, что $k \leq m_1 - 1$, и при этом оценка точна.