

## Поиск во тьме

1. Три поросенка, Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф, хранят в жестяной коробке красные, желтые и зеленые леденцы. Какое наименьшее число леденцов надо взять наугад из коробки, чтобы каждому поросенку обязательно достались пять леденцов одного цвета?
2. В темном чулане 2 гнома хранят вперемешку колпаки  $k$  разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил  $m_1$  колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад такое минимально число колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулся второй гном, и второй гном попросил  $m_2$  колпаков одного цвета, причем  $m_1 \geq m_2$ . Чтобы выполнить просьбы обоих гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан.
  - (a) Докажите, что если  $m_1 = m_2$ , то при любом числе цветов  $k$  существует случай, в котором Белоснежка сходит в чулан ещё раз.
  - (b) Пусть теперь  $m_1 > m_2$ . Докажите, что если  $k \geq \frac{m_1}{m_1 - m_2}$ , то Белоснежке не пришлось бы возвращаться в чулан.
  - (c) Докажите, что если  $m_1 > m_2$  и  $k < \frac{m_1}{m_1 - m_2}$ , то существует случай, в котором Белоснежке пришлось сходить в чулан ещё раз.
3. В темном чулане  $N$  гномов хранят вперемешку колпаки  $k$  разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил  $m_1$  колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад столько колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулись остальные гномы, и второй гном попросил  $m_2$  колпаков одного цвета, третий —  $m_3$ , ...,  $N$ -ый —  $m_N$ , причем  $m_1 > m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_N$ . Чтобы выполнить просьбы всех гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан.
  - (a) Докажите, что если для любого  $t$  верно  $k \geq \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_t}{m_1 - m_{t+1}}$ , то Белоснежке не пришлось бы возвращаться в чулан.
  - (b) Докажите, что если найдется  $t$  такое что  $k < \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_t}{m_1 - m_{t+1}}$ , то существует случай, в котором Белоснежке пришлось сходить в чулан ещё раз.
  - (c) Пусть известно, что  $m_t > m_{t+1}$  для любого  $t$ . Докажите, что  $k \leq m_1 - 1$ , и при этом оценка точна.