Балакин А. А., Гусев А. С., Захаров Д. А., Кушнир А. Ю., Ретинский В. И.

группа: 7 класс *14 марта 2020 г.*

Разбиения натурального ряда

Дано положительное число α. Рассмотрим последовательность $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots$, при всех натуральных n определённую соотношением $a_n = [n\alpha]$. Символом $[x]$ обозначена *целая часть* числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x.

1. Пусть m — натуральное число, а α — положительное иррациональное число. Докажите, что количество элементов последовательности $\{a_n\}$, меньших m, равно $[\frac{m}{\alpha}]$.

2. Пусть α и β — положительные числа, удовлетворяющие условию $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, а m — натуральное число.
(a) Докажите, что $m - 1 \leqslant [\frac{m}{\alpha}] + [\frac{m}{\beta}] \leqslant m$.
(b) В каких случаях $[\frac{m}{\alpha}] + [\frac{m}{\beta}]$ равняется $m - 1$, а каких — m?

3. Пусть α и β — положительные иррациональные числа. Рассмотрим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, определённые формулами $a_n = [n\alpha]$, $b_n = [n\beta]$.
(a) Докажите, что если $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то каждое натуральное число содержится ровно в одной из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.
(b) Докажите, что если каждое натуральное число содержится ровно в одной из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, то $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

4. Докажите, что натуральный ряд можно так разбить на две непересекающиеся последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}$, что $b_n = a_n + n$.
Указание. Рассмотрите $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

5. Докажите, что натуральный ряд можно так разбить на две непересекающиеся последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}$, что $b_n = a_n + 2n$.