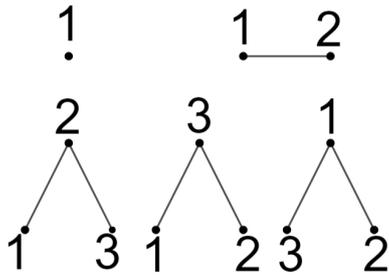


## Код Прюфера

*Определение.* Помеченным деревом на  $n$  вершинах называется дерево на  $n$  вершинах, вершины которого пронумерованы числами от 1 до  $n$ .

На рисунке приведены все помеченные деревья на  $n \leq 3$  вершинах.

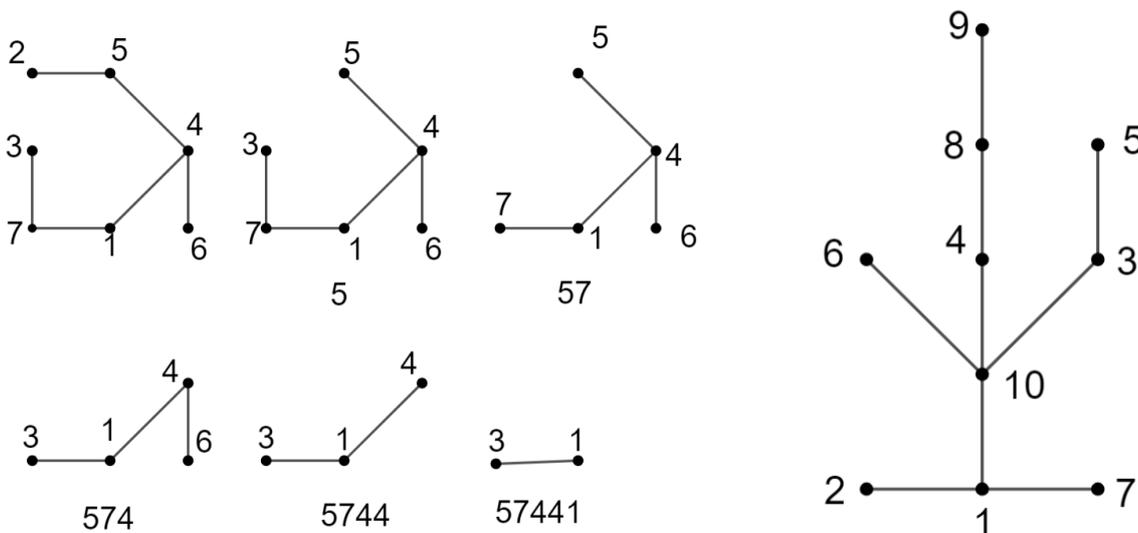


1. Сколько существует помеченных деревьев на 4 вершинах?

Наша цель: доказать, что существует ровно  $n^{n-2}$  помеченных деревьев на  $n$  вершинах. В этом нам поможет код Прюфера.

Код Прюфера сопоставляет помеченному дереву на  $n$  вершинах последовательность длины  $n - 2$  чисел от 1 до  $n$  следующим образом. Найдем висячую вершину с наименьшим номером, выпишем номер его единственного соседа, а саму висячую вершину удалим. Будем повторять процедуру, пока не останутся 2 вершины, соединенные ребром.

Пример:



2. Проверьте, что у любых двух помеченных деревьев на 4 вершинах коды Прюфера различаются.

3. Найдите код Прюфера дерева на 10 вершинах на рисунке.

4. Докажите, что вершина степени  $d$  коде Прюфера встречается ровно  $d - 1$  раз.
5. Восстановите помеченное дерево по коду Прюфера 1125458.
6. (a) Докажите, что по коду Прюфера можно единственным образом восстановить помеченное дерево.  
(b) Докажите, что существует ровно  $n^{n-2}$  помеченных деревьев на  $n$  вершинах.
7. Сколько существует помеченных деревьев на  $n$  вершинах, в которых вершина с номером  $n$  (a) висячая (b) имеет степень ровно  $k$ ?