Балакин А. А., Гусев А. С., Захаров Д. А., Кушнир А. Ю., Ретинский В. И.

Алгебраические тождества

1. Докажите, что любое нечетное число представляется в виде разности квадратов целых чисел.

2. Пусть известно, что $a + \frac{1}{a}$ – целое число. **(a)** Докажите, что $a^2 + \frac{1}{a^2}$ – целое число. **(b)** Докажите, что $a^n + \frac{1}{a^n}$ – целое число для любого натурального n.

3. Докажите, что если к произведению четырех последовательных чисел прибавить единицу, то получится точный квадрат.

4. Докажите, что число $n^4 + 4$ – составное для любого $n > 1$.

5. Известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Докажите, что среди a, b и c есть 2 числа, в сумме дающие 0.

6. **(a)** Докажите, что для любых различных чисел a_1, a_2 можно так подобрать числа A_1 и A_2, что будет выполняться тождество

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2}$$

(b) Докажите, что для любых попарно различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно так подобрать числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что будет выполняться тождество

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x+a_n}$$

7. Докажите, что если $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$, то и $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$.