

Факториалы и степень вхождения

1. Сколькими нулями оканчивается число $100!$?
2. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число $(n + 1)(n + 2) \dots (2n)$.
3. (a) Докажите, что $n!$ не делится на 2^n .
(b) Докажите, что наибольшая степень двойки, на которую делится число $n!$, равна $n - S_2(n)$, где $S_2(n)$ — сумма цифр в двоичной записи числа n .
4. Пусть p — простое число. Докажите, что степень вхождения p в $n!$ равна

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

5. Пусть p — простое число. Докажите, что степень вхождения p в C_n^k равна числу переносов при сложении чисел k и $n - k$ в p -ичной системе счисления.
6. Пусть p — простое, и C_n^k делится на p^a . Докажите, что $n \geq p^a$.