Мудрецы и шляпы

1. Каждому из n мудрецов надевают колпак одного из n цветов. Каждый мудрец видит колпаки всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если
(a) $n = 2$ **(b)** $n = 3$ **(c)** n – любое

2. **(a)** Каждому из двух мудрецов надевают шляпу одного из трех цветов, и сообщают, что цвета их шляп разные. Каждый из них видит шляпу другого, но не видит свою. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал. **(b)** А как победить троим мудрецам, если на них будут надевать шляпу одного из 5 цветов?

3. Султан устроил экзамен 11 придворным мудрецам. По правилу экзамена султан размещает 10 мудрецов в 10 ям, расположенных по кругу, и еще одного мудреца сажает на вышку в центре круга. На лбу у каждого из первых 10 мудрецов султан пишет число 1 или 2; на лбу у центрального мудреца султан пишет число от 1 до 1024. Мудрец на вышке видит числа на всех остальных мудрецах, а те видят его число (но не видят друг друга). Все мудрецы должны одновременно попытаться угадать свои числа. Султан заранее объяснил мудрецам правила экзамена и дал им время посовещаться до начала экзамена. Могут ли мудрецы действовать так, чтобы хотя бы один из них заведомо угадал свое число?

4. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого, синего или красного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из трёх цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?

5. У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1$, то мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.