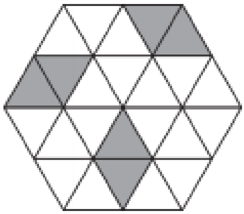
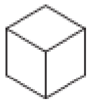
Функция высоты

Рассмотим правильный шестиугольник, состоящий из равных треугольников. Назовем *доминошкой* ромб, состоящий из двух соседних единичных треугольников. Будем рассматривать разбиения шестиугольника на доминошки.



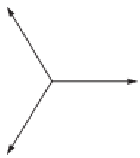
1. Докажите, что в любом таком разбиении найдутся 3 доминошки, любые 2 из которых имеют общую сторону.



Давайте по разбиению построим граф: вершины — узлы сетки, ребра — отрезки границ доминошек разбиения. Будем называть полученный граф *графом разбиения*.

2. Докажите, что любой граф разбиения — двудольный.

Давайте ориентируем граф разбиения: все горизонтальные ребра — слева направо, а остальные — вверх-влево и вниз-влево.



3. Докажите, что для любого простого замкнутого обхода графа разбиения число ребер, ориентированных по направлению обхода, равно числу ребер, ориентированных против направления обхода.

4. Докажите, что в вершинах разбиения можно расставить числа так, что числа, соединенные ребром, отличаются на 1, и все ребра ориентированы от меньшего числа к большему.

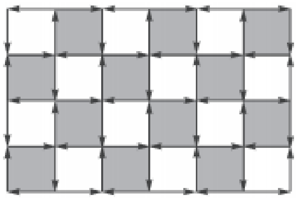
Полученную расстановку чисел назовем *функцией высоты*. Эта расстановка чисел единственна с точностью до прибавления ко всем числам константы. Поэтому, дополнительно скажем, что в самой вершине стоит число 0.

5. Пусть сторона шестиугольна равна 2. Среди всех разбиений найдите то, у которого сумма значений функции высоты на всех вершинах минимальна.

Теперь мы будем рассматривать разбиения квадрата $2n \times 2n$ на обычные доминошки 1×2. Определение графа разбиение аналогично предыдущему случаю.

6. В каждом разбиении квадрата на доминошки найдутся две доминошки, образующие квадрат 2×2.

Раскрасим все клетки доски в шахматном порядке. Ориентируем граф разбиения так, что вокруг черных клеток все стрелки идут по часовой стрелке, а вокруг белых – против.



7. Сформулируйте и докажите аналог 3 задачи для квадратной доски.

8. Сформулируйте и докажите аналог 4 задачи для квадратной доски.

9. Докажите, что все вершины разбиения можно покрасить в 3 цвета так, что вершины на расстоянии 1, соединенные ребром, покрашены в разные цвета, а вершины на расстоянии 1, не соединенные ребром, покрашены в одинаковые цвета.