

## Упорядочивание



1. На доске написано 2019 чисел. Оказалось, что сумма любых двух написанных на доске чисел также написана на доске. Какое наибольшее количество ненулевых чисел может быть написано?
2. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?
3. Пусть каждое из  $2n$  различных натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  не превосходит  $n^2$  ( $n > 2$ ). Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.
4. На плоскости отмечено  $n$  точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее  $2n - 3$  различных точек.
5. Обозначим через  $a$  и  $A$  соответственно наименьшее и наибольшее из  $n$  различных натуральных чисел.
  - (a) Докажите, что НОК всех чисел не меньше  $na$
  - (b) Докажите, что НОД всех чисел не больше  $A/n$
6. В таблице  $10 \times 10$  записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы одной из строк.
7. На прямой дано  $2n + 1$  отрезков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с  $n$  из оставшихся. Доказать, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.