Серия 22. Комбинаторика

1. На доске в некотором порядке написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2018$. К каждому числу прибавили номер места, на котором оно стоит. Докажите, среди полученных чисел либо найдутся два равных числа, либо два числа, различающихся на 2018.

2. 40 членов жюри подбирают вторую задачу для городской олимпиады 9 класса. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить в вариант задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри умеет решать 26 задач, причем любые два умеют решать разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

3. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?

4. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребенка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

5. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны.

6. Какое наибольшее количество делителей числа 900 можно выбрать так, чтобы никакие 2 выбранных числа не делились друг на друга?

7. Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом n-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию $1, (n + 2), (n + 2)^2, \ldots$, либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

8. Для любых натуральных $0 < k < m < n$ докажите, что числа C_n^k и C_n^m имеют общий делитель.