Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **14.11.2019**

Crambe repetita

И десять раз повторенное будет нравиться

Квинт Гораций Флакк

1. Докажите, что многочлен $P(x) = (x+1)^{2017} - x^{2017} - 1$ делится на $Q(x) = (x^2+x+1)^2$.

2. Пусть a, b, c — корни уравнения $x^3 - x + 1 = 0$. Найдите $a^8 + b^8 + c^8$.

3. Найдите число квадратных трёхчленов $ax^2 + bx + c$, которые удовлетворяют следующим условиям:
(a) a, b, c различны;
(b) $a, b, c \in \{1, 2, 3, \cdots 2019\}$;
(c) $ax^2 + bx + c$ делится на $x + 1$.

4. Про многочлен пятой степени $P(x)$ известно, что $(x-1)^3$ делит $P(x)+1$, а $(x+1)^3$ делит $P(x) - 1$. Найдите все такие многочлены.

5. Квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2+bx+c$ таков, что $|P(0)| \leqslant 1$, $|P(1)| \leqslant 1$, $|P(-1)| \leqslant 1$. Докажите, что $P(x) \leqslant 7$, где $x \in [-2; 2]$.

6. Дан многочлен $f(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots.. + a_1x + a_0$. Докажите, что существует такой i из множества $\{1, \ldots., n\}$, что имеет место неравенство $|f(i)| \geqslant \frac{n!}{\binom{n}{i}}$.

7. Известно, что a, b — натуральные числа такие, что $ab \neq 1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$.

8. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющее уравнению

$$P\left(x^3\right) = P\left(x^2\right)P\left(x\right) + xP\left(x^2\right) + x^2P\left(x\right)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

9. Petya and Vasya play the following game. Petya conceives a polynomial $P(x)$ having integer coefficients. On each move, Vasya pays him a ruble, and calls an integer a of his choice, which has not yet been called by him. Petya has to reply with the number of distinct integer solutions of the equation $P(x) = a$. The game continues until Petya is forced to repeat an answer. What minimal amount of rubles must Vasya pay in order to win?

10.Дан многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, удовлетворяющий свойствам
1)$|a_0|$ — простое число .
2)$|a_0| > |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|$
Докажите, что $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.