ЦПМ. Группа 11-2 **21.10.2019**

Лемма об уточнении показателя

Sapienti sat

Латинская мудрость

Лемма об уточнении показателя. Даны простое число p и натуральные числа k, a, b, причём $p|(a-b)$, $a \neq b$; a и b не делятся на p. Тогда если $p > 2$ или $\mathrm{ord}_p(a-b) > 1$, то $\mathrm{ord}_p(a^k-b^k) = \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(k)$.

1. На какую максимальную степень пятёрки делится число $3^{1000} - 2^{1000}$?

2. Найдите наименьшее простое p такое, что $2^{120!} - 1$ делится на p, но не делится на p^2

3. При каких натуральных n число $(2014^n - 1)$ делится на $(100^n - 1)$?

4. Пусть натуральные числа x, y, p, n, k такие, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n $(n > 1)$ — нечётное, а число p — нечётное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

5. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $z^x + 1 = (z + 1)^y$.

7. Пусть a, $b \in \mathbb{N}$. Докажите, что лишь для конечного числа $n \in \mathbb{N}$ сумма $(a+1/2)^n+(b+1/2)^n$ — целая.

8. Найдите все натуральные x, y такие, что $p^x - y^p = 1$, где p — простое.

9. Существует ли натуральное n, имеющее ровно 2019 простых делителей и делящее $2^n + 1$?

10. Докажите, что существует степень пятёрки, в десятичной записи которой идёт 2019 нулей подряд.

ЦПМ. Группа 11-2 **21.10.2019**

Лемма об уточнении показателя

Sapienti sat

Латинская мудрость

Лемма об уточнении показателя. Даны простое число p и натуральные числа k, a, b, причём $p|(a-b)$, $a \neq b$; a и b не делятся на p. Тогда если $p > 2$ или $\mathrm{ord}_p(a-b) > 1$, то $\mathrm{ord}_p(a^k-b^k) = \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(k)$.

1. На какую максимальную степень пятёрки делится число $3^{1000} - 2^{1000}$?

2. Найдите наименьшее простое p такое, что $2^{120!} - 1$ делится на p, но не делится на p^2

3. При каких натуральных n число $(2014^n - 1)$ делится на $(100^n - 1)$?

4. Пусть натуральные числа x, y, p, n, k такие, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n $(n > 1)$ — нечётное, а число p — нечётное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

5. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $z^x + 1 = (z + 1)^y$.

7. Пусть a, $b \in \mathbb{N}$. Докажите, что лишь для конечного числа $n \in \mathbb{N}$ сумма $(a+1/2)^n+(b+1/2)^n$ — целая.

8. Найдите все натуральные x, y такие, что $p^x - y^p = 1$, где p — простое.

9. Существует ли натуральное n, имеющее ровно 2019 простых делителей и делящее $2^n + 1$?

10. Докажите, что существует степень пятёрки, в десятичной записи которой идёт 2019 нулей подряд.