Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **23.01.2020**

Серия 24. Геометрия

1. Докажите, что расстояние между серединой стороны BC треугольника ABC и серединой дуги ABC его описанной окружности не меньше, чем $AB/2$.

2. В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM, высоту AH и биссектрису AL. Оказалось, что точки B, H, L, M, C лежат на прямой BC именно в таком порядке, причем $LH < LM$. Докажите, что $BC > 2AL$.

3. На стороне AB неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AC = AP$ и $BC = BQ$. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает биссектрису угла C в точке R (внутри треугольника). Докажите, что $\angle ACB + \angle PRQ = 180°$.

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, а медианы треугольника ACD — в точке N. Окружность, описанная около треугольника ACM, пересекает отрезок BD в точке K, лежащей внутри треугольника AMB. Известно, что $\angle MAN = \angle ANC = 90°$. Докажите, что $\angle AKD = \angle MKC$.

5. Неравнобедренный треугольник ABC периметра 12 вписан в окружность ω. Точки P и Q — середины дуг ABC и ACB соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке A, пересекает луч PQ в точке R. Оказалось, что середина отрезка AR лежит на прямой BC. Найдите длину отрезка BC.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH и медиана BM. На описанной окружности треугольника BHM отмечена такая точка D, что $AD \parallel BM$ и точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Докажите, что $BC = BD$.

7. Биссектрисы BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. На продолжениях отрезков BB_1 и CC_1 отмечены точки B' и C' соответственно так, что четырехугольник $AB'IC'$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle BAC = 60°$, то прямая $B'C'$ проходит через точку пересечения описанных окружностей треугольников BC_1B' и CB_1C'.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, перпендикулярная BD, пересекает отрезки AB, BC и лучи DA, DC в точках P, Q, R, S соответственно. Известно, что $PR = QS$. Докажите, что середина отрезка PQ равноудалена от точек A и C.

9. В тетраэдре середины всех ребер лежат на одной сфере. Докажите, что его высоты пересекаются в одной точке.

10. В тетраэдре $PABC$ проведена высота PH. Из точки H на прямые PA, PB и PC опущены перпендикуляры HA', HB' и HC'. Плоскости ABC и $A'B'C'$ пересекаются по прямой ℓ. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что прямые OH и ℓ перпендикулярны.