Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **16.12.2019**

Серия 20. Бертран и другие

De principiis non est disputandum

Латинская мудрость

Каждая задача состоит из двух пунктов. В первом можно использовать постулат Бертрана, во втором — нельзя.

1. Обозначим $p(n)$ — n-е простое число. Докажите, что при $n \geqslant 2$ $p(1)p(2)\dots p(n) < 2^{n(n+1)/2}$.

2. Докажите, что C_{2n}^{n} не является квадратом при всех $n \geqslant 962$.

3. Пусть $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$, $E \subset S$, причем $|E| = n + 1$. Докажите, что существуют $x, y \in E$ такие, что $x + y$ — простое число.

4. Докажите, что уравнение $n! = a^2 + b^2$ не имеет решений в натуральных числах при $n \geqslant 962$.

5. Для натуральных $n \geq 3$ определим последовательность α_1, α_2, …, α_k степеней в разложении на простые множители $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ — простые. Найдите все такие $n \geq 3$, для которых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ образуют геометрическую прогрессию.

6. Let n be an integer of the form $a^2 + b^2$, where a and b are relatively prime integers and such that if p is a prime, $p \leq \sqrt{n}$, then p divides ab. Determine all such n.