Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **16.09.2019**

Формула Лежандра и IMO-2019-4

1. Докажите, что максимальная степень p, на которую делится $n!$ равна

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^5}\right\rfloor + \ldots$$

2. Докажите, что

$$\nu_p(n!) \leqslant \frac{n}{p-1}.$$

3. Какое наименьшее число N такое, что $N!$ заканчивается на 2019 нулей?

4. Докажите, что $0 \leqslant [2x] - 2[x] \leqslant 1$.

5. Докажите, что C_{2n}^n — чётное число.

6. Докажите, что

$$\nu_2\left(C_{2n}^n\right) = \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{4}\right\} + \left\{\frac{n}{8}\right\} + \ldots$$

7. Чему равно $\nu_2\big((2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})\big)$?

8. Докажите, что $\nu_3(4^m-1) = 1 + \nu_3(m)$.

9. Чему равно $\nu_3\big((2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})\big)$?

10. Решите в натуральных числах уравнение

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}).$$

Кружок в Хамовниках. Группа 11-2 **16.09.2019**

Формула Лежандра и IMO-2019-4

1. Докажите, что максимальная степень p, на которую делится $n!$ равна

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^5}\right\rfloor + \ldots$$

2. Докажите, что

$$\nu_p(n!) \leqslant \frac{n}{p-1}.$$

3. Какое наименьшее число N такое, что $N!$ заканчивается на 2019 нулей?

4. Докажите, что $0 \leqslant [2x] - 2[x] \leqslant 1$.

5. Докажите, что C_{2n}^n — чётное число.

6. Докажите, что

$$\nu_2\left(C_{2n}^n\right) = \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{4}\right\} + \left\{\frac{n}{8}\right\} + \ldots$$

7. Чему равно $\nu_2\big((2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})\big)$?

8. Докажите, что $\nu_3(4^m-1) = 1 + \nu_3(m)$.

9. Чему равно $\nu_3\big((2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1})\big)$?

10. Решите в натуральных числах уравнение

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}).$$